Série 4 –Dynamique des fluides Newtoniens

Exercice N°1 : Écoulement de Couette (plan)

1. L'écoulement est dans le plan (xy) et unidirectionnel selon x, on peut donc admettre que les composantes de vitesse selon y et z sont nulles. D'autre part l'écoulement est incompressible donc :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \cancel{\frac{\partial u_y}{\partial y}} + \cancel{\frac{\partial u_z}{\partial z}}$$

On en déduit donc que $\vec{u} = (u_x(y), 0, 0)$.

2. Les équations de *Navier-Stokes* se réduisent à :

$$\rho\left(\cancel{\frac{\partial u_x}{\partial t}} + \cancel{u_x \frac{\partial u_x}{\partial x}} + \cancel{u_x \frac{\partial u_y}{\partial y}} + \cancel{u_x \frac{\partial u_z}{\partial z}}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \cancel{\rho g_x} + \mu\left(\cancel{\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \cancel{\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}}\right)$$

$$\rho\left(\cancel{\frac{\partial u_y}{\partial t}} + \cancel{u_y \frac{\partial u_x}{\partial x}} + \cancel{u_y \frac{\partial u_y}{\partial y}} + \cancel{u_y \frac{\partial u_z}{\partial z}}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \cancel{\rho g_y} + \mu\left(\cancel{\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}}\right)$$

$$\rho\left(\cancel{\frac{\partial u_z}{\partial t}} + \cancel{u_z \frac{\partial u_x}{\partial x}} + \cancel{u_z \frac{\partial u_y}{\partial y}} + \cancel{u_z \frac{\partial u_z}{\partial z}}\right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \cancel{\rho g_z} + \mu\left(\cancel{\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}}\right)$$

Soit :

$$\begin{cases} 0 = -\dfrac{\partial p}{\partial x} + \mu \dfrac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \\ 0 = -\dfrac{\partial p}{\partial y} \\ 0 = -\dfrac{\partial p}{\partial z} \end{cases}$$

Les 2 dernières égalités nous disent que la pression ne dépend que de x et comme la vitesse ne dépend que de y, la première égalité nous dit que :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} = K, K \text{ est une constante}$$

Ceci conduit à : $p(x) = Kx + C$ (où C est une constante). Comme $p = p_0$ en $x = 0$ et $x = L$, on en déduit donc que $K = 0$ et $p = p_0$ partout. Les conditions d'adhérence du fluide aux parois sont :

$$\begin{cases} u_x(y = 0) = 0 \\ u_x(y = h) = U \end{cases}$$

La relation (5.92) s'intègre sous la forme :

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow u_x = a\,y + b$$

On trouve les constantes a et b avec la relation (5.93), ce qui conduit à :

$$u_x(y) = U\,y/h$$

3. le débit masse par unité de largeur de plaque est :

$$Q_m = \rho \int_0^h u_x(y)\,\mathrm{d}y = \rho U \frac{h}{2}$$

Exercice N°2 : Écoulement de Poiseuille (tube)

1. On se place dans le repère de coordonnées cylindriques (r,θ,z). L'écoulement est unidirectionnel selon z et la symétrie de révolution rend la vitesse indépendante de θ. Enfin, l'équation de continuité donne :

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 = \cancel{\frac{\partial u_r}{\partial r}} + \frac{1}{r}\cancel{\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

On en déduit donc que $\vec{u} = (0,0,u_z(r))$.

2. Les équations de *Navier-Stokes* écrites en coordonnées cylindriques (voir annexe) se réduisent à :

$$\begin{cases} 0 = -\dfrac{\partial p}{\partial x} \\ 0 = -\dfrac{\partial p}{\partial \theta} \\ 0 = -\dfrac{\partial p}{\partial z} + \dfrac{\mu}{r}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\dfrac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}r}\right) \end{cases}$$

Les 2 premières relations entraînent que p ne dépend que de z et la 3[e] relation conduit à :

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = \frac{\mu}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}r}\right) = K,\ K \text{ est une constante}$$

Les conditions limites en pression sont : $p(x=0) = \Delta p$ et $p(x=L) = 0$. La relation conduit alors à :

$$p = \Delta p\left(1 - \frac{z}{L}\right)$$

Les conditions aux limites en vitesse sont :

$$\begin{cases} u_z(r = R) = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}r}(r = 0) = 0 \end{cases}$$

L'intégration de la relation (5.95) avec les conditions aux limites de la relation (5.96) conduisent à :

$$u_z(r) = \frac{\Delta p}{4\mu L}(R^2 - r^2)$$

3. Le débit masse par unité de longueur de la conduite est :

$$Q_m = \rho\int_0^R u_z(r)2\pi r\,\mathrm{d}r = \rho\frac{\pi}{8\mu}\frac{\Delta p}{L}R^4$$

4. Si $\vec{t}$ est le vecteur tangent à la paroi, la contrainte à la paroi est par définition :

$$\tau_p = \overline{\overline{\sigma}}(\vec{t}) \cdot \vec{t} = -\mu\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R}$$

Avec (5.97) on trouve alors :

$$\tau_p = \frac{\Delta p\, R}{2\, L}$$

Exercice N°3 : Écoulement de Couette (cylindrique)

1. L'écoulement a lieu dans le plan (rz) et il est unidirectionnel selon θ. D'autre part, l'équation de continuité conduit à :

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 = \cancel{\frac{\partial u_r}{\partial r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \cancel{\frac{\partial u_z}{\partial z}}$$

Ce qui montre que la vitesse selon θ ne dépend que de r et donc $\vec{u} = (0, u_\theta(r), 0)$.

2. Les équations de *Navier-Stokes* se résument à :

$$\begin{cases} 0 = -\dfrac{\partial p}{\partial r} \\ 0 = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}(r\, u_\theta)}{\mathrm{d}r}\right) \\ 0 = -\dfrac{\partial p}{\partial z} \end{cases}$$

Les égalités 1 et 3 montrent que la pression ne dépend que de θ et la 2^{e} égalité conduit à :

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = \mu\, r \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}(r\, u_\theta)}{\mathrm{d}r}\right) = K,\ K \text{ est une constante}$$

Les conditions aux limites en vitesse sont :

$$\begin{cases} u_z(r = R_2) = 0 \\ u_z(r = R_1) = \Omega R_1 \end{cases}$$

En intégrant la relation (5.99) avec les conditions aux limites (5.100) on trouve :

$$u_\theta(r) = \frac{R_1^2\, \Omega}{(R_2^2 - R_1^2)}\left(\frac{R_2^2 - r^2}{r}\right)$$

3. Le couple à exercer est :

$$\begin{aligned} C &= \tau(r = R_2) S = 2\mu\, \dot{\varepsilon}_{rz}(r = R_2) 2\pi R_2 L \\ &= 2\pi R_2 L\left(\left.\frac{\mathrm{d}u_\theta}{\mathrm{d}r}\right|_{r=R_2} - \frac{u_\theta(r = R_2)}{R_2}\right) \times 2\mu \end{aligned}$$

Soit :

$$C = 4\pi\mu \frac{R_1^2 R_1^2 \Omega L}{(R_2^2 - R_1^2)}$$

Exercice N°4 : Surface libre

Les 3 fonctions inconnues u(x,z,t), w(x,z,t) et p(x,z,t) peuvent être déterminées à l'aide des 2 composantes de l'équation de Navier-Stokes et de l'équation de continuité.
L'équation de Navier-Stokes s'écrit:

$$\text{selon x:}\quad \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \rho g \sin\alpha - \frac{\partial p}{\partial x} + \eta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

$$\text{selon z:}\quad \rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) = -\rho g \cos\alpha - \frac{\partial p}{\partial z} + \eta\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)$$

L'équation de continuité s'écrit:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

a. L'écoulement étant par hypothèse permanent, on a $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ et aucune dépendance selon x,

i.e. $\frac{\partial}{\partial x} = 0$ (épaisseur a constante ==> w(a) = 0). Ainsi: $\frac{\partial w}{\partial z} = 0$ et donc w est nul.

b. w étant nul, l'équation 1 indique que u ne dépend que de z. Les équations de Navier-Stokes s'écrivent alors:

$$\frac{\partial p}{\partial x} - \rho g \sin\alpha = \eta \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (2)$$

$$\rho g \cos\alpha + \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

L'intégration de l'équation 3 conduit à:

$$p(x, z) = -\rho g z \cos\alpha + f(x) \implies p(z) = p_{atm} + \rho g \cos\alpha (a - z)$$

La pression étant constante sur la surface libre (z = a), on a nécessairement f(x) = constante dont la valeur est déterminée facilement. p ne dépend donc pas de x.

c. De l'équation 2 on tire:

$$\eta \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial p}{\partial x} - \rho g \sin\alpha \implies \eta \frac{\partial u}{\partial z} = -\rho g z \sin\alpha + A \implies \eta u = -\rho g \frac{z^2}{2} \sin\alpha + Az + B$$

La condition de non-glissement implique que la vitesse u est nulle sur la plaque (z = 0); en conséquence, B = 0.
La constante A est déterminée en observant que la contrainte de cisaillement

$\sigma_{xz} = \eta \frac{\partial u}{\partial z}$ est nulle sur la surface libre (z = a); on obtient A = ρgasinα et donc:

$$u(z) = \frac{\rho g}{\eta} \sin\alpha \left(az - \frac{z^2}{2} \right)$$

d. Le débit par unité de largeur Q_{un} de la plaque vaut ainsi: $Q_{un} = \int_0^a u dz = \frac{\rho g \sin\alpha}{3\eta} a^3$